DN6 : Le produit de Cauchy et l'exponentielle

Leçons : 213, 203, 235 ; Référence : NGJ

Notations : On suppose ici que le terme général d'une série $\sum u$ *est par défaut une suite indicée dans* $\mathbb{N}$ *et on note* $\forall n \in \mathbb{N}, S_n^u = \sum_{k=0}^{n} u_k$ *de sorte que* S^u *désigne la suite des sommes partielles de* $\sum u$*, on note* Σ_+ *l'ensemble des séries réelles positives et on rappelle que* $\forall (\sum u , \sum v) \in (\Sigma_+)^2$ *le produit de Cauchy* $\sum u \times \sum v$ *est la série de terme général w ou* $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{i+j=n} u_i v_j$

Théorème 1 : (Produit de Cauchy de séries réelles positives) $\forall (\sum u , \sum v) \in (\Sigma_+)^2$, si $\sum u$ et $\sum v$ sont convergentes alors $\sum w = \sum u \times \sum v$ est convergente et on a $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = (\sum_{n=0}^{\infty} u_n) \times (\sum_{n=0}^{\infty} v_n)$

• On note $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = [\![0, n]\!]^2$ et $T_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 | i + j \leq n\}$ et on a $\forall n \in \mathbb{N}, T_n \subset I_n \subset T_{2n} \Rightarrow \sum_{(i,j)\in T_n} u_i v_j \leq \sum_{(i,j)\in I_n} u_i v_j \leq \sum_{(i,j)\in T_{2n}} u_i v_j \Rightarrow S_n^w \leq S_n^u \times S_n^v \leq S_{2n}^w$

• On sait que S^u et S^v sont convergentes donc que $S^u \times S^v$ converge vers $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n) \times (\sum_{n=0}^{\infty} v_n)$ et d'après le point précédent on a $\forall n \in \mathbb{N}, S_n^w \leq S_n^u \times S_n^v$ donc S^w est majorée puis convergente

• On a montré précédemment que l'on a $\forall n \in \mathbb{N}, S_n^w \leq S_n^u \times S_n^v \leq S_{2n}^w$ avec S^w et $S^u \times S^v$ convergentes, un passage à la limite dans ces inégalités nous donne alors $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = (\sum_{n=0}^{\infty} u_n) \times (\sum_{n=0}^{\infty} v_n)$

Théorème 2 : Si A est une $\hat{\mathbb{C}}$ algèbre normée complète alors $\forall u \in A$ la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ est absolument convergente. *On note* e^u *sa somme et on dit que* e^u *est l'exponentielle de* u

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a $\left\|\frac{u^n}{n!}\right\| \leq \frac{\|u\|^n}{n!}$ par récurrence car il s'agit d'une norme d'algèbre, d'autre part on a $\lim_{n\to\infty} \frac{\|u\|}{(n+1)} = 0$ donc la série $\sum \frac{\|u\|^n}{n!}$ est convergente d'après le critère de d'Alembert et ainsi $\sum \frac{u^n}{n!}$ est absolument convergente

Théorème 3 : Si A est une $\hat{\mathbb{C}}$ algèbre normée complète alors $\forall (u, v) \in A^2, (uv = vu) \to e^{(u+v)} = e^u\, e^v$

• On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_n(u, v) = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{u^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{v^j}{j!}\right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(u+v)^k}{k!} = \left(\sum_{(i,j)\in I_n} \frac{u^i}{i!} . \frac{v^j}{j!}\right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(u+v)^k}{k!}$ avec $I_n = [\![0, n]\!]^2$, comme $uv = vu$ la formule du binôme de Newton donne $\sum_{k=0}^{n} \frac{(u+v)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i+j=k} \binom{k}{i} u^i v^j = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} \frac{u^i}{i!} . \frac{v^j}{(k-i)!} = \sum_{(i,j)\in T_n} \frac{u^i}{i!} . \frac{v^j}{j!}$ avec $T_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 | i + j \leq n\}$ et on obtient $\Delta_n(u, v) = \left(\sum_{(i,j)\in I_n} \frac{u^i}{i!} . \frac{v^j}{j!}\right) - \sum_{(i,j)\in T_n} \frac{u^i}{i!} . \frac{v^j}{j!} = \sum_{(i,j)\in I_n \setminus T_n} \frac{u^i}{i!} . \frac{v^j}{j!}$ puisque $T_n \subset I_n$

• D'après le point précédent $\|\Delta_n(u, v)\| \leq \sum_{(i,j)\in I_n\setminus T_n} \frac{\|u\|^i}{i!} . \frac{\|v\|^j}{j!} = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\|u\|^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{\|v\|^j}{j!}\right) - \sum_{(i,j)\in T_n} \frac{\|u\|^i}{i!} . \frac{\|v\|^j}{j!} = \Delta_n(\|u\|, \|v\|)$ en utilisant le fait qu'il s'agit d'une norme d'algèbre, en considérant le produit de Cauchy des séries réelles positives $\sum \frac{\|u\|^n}{n!}$ et $\sum \frac{\|v\|^n}{n!}$ on obtient $\lim_{n\to\infty} \Delta_n(\|u\|, \|v\|) = 0$ d'après le théorème 1 et un passage à la limite dans l'inégalité précédente prouve alors que $\lim_{n\to\infty} \Delta_n(u, v) = 0_A$, finalement A étant complète les séries $\sum \frac{u^n}{n!}$, $\sum \frac{v^n}{n!}$ et $\sum \frac{(u+v)^n}{n!}$ sont convergentes d'après le théorème 2 et en passant à la limite dans l'égalité $\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{u^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{v^j}{j!}\right) = \Delta_n(u, v) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(u+v)^k}{k!}$ on obtient $e^u\, e^v = e^{(u+v)}$

DEVELOPPEMENT SOUS LA FORME D'UN EXERCICE :

1) Montrer que $\forall (\sum u , \sum v) \in (\Sigma_+)^2$, si $\sum u$ et $\sum v$ sont convergentes alors $\sum w = \sum u \times \sum v$ est convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = (\sum_{n=0}^{\infty} u_n) \times (\sum_{n=0}^{\infty} v_n)$
2) Montrer que si A est une $\hat{\mathbb{C}}$ algèbre normée complète alors $\forall u \in A$ la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ est absolument convergente
3) Montrer que si A est une $\hat{\mathbb{C}}$ algèbre normée complète alors $\forall (u, v) \in A^2, (uv = vu) \Rightarrow e^{(u+v)} = e^u\, e^v$